Bitte an alle Korrektoren:

Versuchen Sie bitte, die Korrektur so ausführlich zu begründen, dass die Studierenden eine Chance haben, aus Ihren Fehlern zu lernen! Aus einer Punktzahl allein ergibt sich kein Lerneffekt. Für häufige ~~Fehler~~ häufige Begründungen gibt es bei elektronischer Korrektur zum Glück Copy & Paste. Alternativ können Sie mir auch eine separate Aufstellung besonders häufiger Fehler schicken, die ich an die Studierenden kommunizieren kann.

1 | Verpackungswahn (10 Punkte) K-VR

Seien V und W Vektorräume, seien $M, N \subseteq V$ und $O \subset W$ Teilmengen, und sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind im Allgemeinen richtig?

(a) $\langle\langle M\rangle\rangle = \langle M\rangle$

(b) $\langle M \cap N\rangle = \langle M\rangle \cap \langle N\rangle$

(c) $\langle f(M)\rangle = f(\langle M\rangle)$

(d) $\langle f^{-1}(O)\rangle = f^{-1}(\langle O\rangle)$

(a) richtig 2,5P

Allgemein gilt für jeden UVR U:

$$\langle U\rangle = U.$$

Das ist klar aus der Charakterisierung von $\langle U\rangle$ als kleinstem UVR der U enthält:

Da $\langle M\rangle$ stets ein UVR ist folgt insbesondere:

$$\langle\langle M\rangle\rangle = \langle M\rangle$$

(Inklusion $\langle\langle M\rangle\rangle \supseteq \langle M\rangle$ folgt auch sofort aus $\langle M\rangle \supseteq M$ und Def. von $\langle - \rangle$.)

(b) falsch 2,5P

Wähle z.B. $V = \mathbb{R}$, $M = \{1\}$, $N = \{2\}$

$$\langle M \cap N\rangle = \langle \emptyset \rangle = \{0\}$$

$$\neq$$

$$\langle M\rangle \cap \langle N\rangle = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

(c) richtig (2,5P)

$(\subseteq)$ $\underline{v} \in \langle f(M) \rangle$

$$\Rightarrow \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} s_i f(\underline{v}_i) \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und gewisse } s_i \in K$$

$$= f\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} s_i \underline{v}_i}_{\in \langle M \rangle}\Big)$$

f linear

$$\in f(\langle M \rangle)$$

$(\supseteq)$ $\underline{v} \in f(\langle M \rangle)$

$$\Rightarrow \underline{v} = f\Big(\sum_{i=1}^{n} s_i \underline{v}_i\Big) \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und gewisse } s_i \in K$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_i \underbrace{f(\underline{v}_i)}_{\in f(M)}$$

f linear

$$\in \langle f(M) \rangle$$

(d) falsch (2,5P)

Wähle z.B. $V = \mathbb{R}$

$W = \{0\}$, $\mathcal{O} = \emptyset$

$$f: \mathbb{R} \to \{\underline{0}\}, \quad x \mapsto \underline{0}$$

$$\langle f^{-1}(\emptyset) \rangle = \langle \emptyset \rangle = \{0\}$$

$$f^{-1}(\langle \emptyset \rangle) = f^{-1}(\{\underline{0}\}) = \mathbb{R}$$

($\{0\} \neq \mathbb{R}$)

Keine Punkte ohne Beweis Gegenbeispiel

2 | Päckchen (10 Punkte)

Welche der folgenden Tupel in $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig? Welche sind Erzeugendensysteme? Welche sind Basen? Argumentieren Sie jeweils direkt mit den Definitionen (Def. 5.1), nicht mit den nachfolgenden Sätzen!

(a) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\right)$

(b) $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right)$

(c) $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}\right)$

(d) $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$

(e) $(\mathbf{v})_{\mathbf{v}\in\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix} \,\middle|\, y,z\in\mathbb{R}\right\}}$

jeweils 2P je Aufgabenteil:

1P für linear (un)abhängig

1P für Erzeugendensystem

(a) linear unabhängig:

$$a\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{a = 0} & (1) \\ \text{und} \quad a + 2b = 0 & (2) \\ \text{und} \quad a - 2b = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) eingesetzt in (2) liefert: $\boxed{b = 0}$

Kein Erzeugendensystem:

Ist $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$,

also $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\a+2b\\a-2b\end{pmatrix}$,

so ist $x+y+z = 3x$. Daher z.B.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} \right\rangle.$$

(b) linear unabhängig:

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=0\\ 2b=0\\ 3c=0\end{cases}$$

Also $a=b=c=0$

Erzeugendensystem:

Jeder Vektor $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ lässt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{y}{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+\frac{z}{3}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

(c) linear unabhängig:

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=0 & (1)\\ a+2c=0 & (2)\\ a-2c=0 & (3)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=b & (1)\\ 2a=0 & ((2)+(3))\\ 4c=0 & ((2)-(3))\end{cases}$$

Also $a=b=c=0$.

Erzeugendensystem:

optional

Ansatz: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = x & (1) \\ a + 2c = y & (2) \\ a - 2c = z & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = x & (1) \\ 2a = y + z & ((2)+(3)) \\ 4c = y - z & ((2)-(3)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}(y+z) \\ b \underset{(1)}{=} a - x = \frac{1}{2}(y+z) - x \\ c = \frac{1}{4}(y-z) \end{cases}$$

Wenn Lösung hier endet, $-\frac{1}{4}$ P
(denn nötige Implikation "$\Leftarrow$" ist bei derartigen Umformungen unklar.)

Lösung: Für beliebiges $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\frac{1}{2}(y+z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}(y+z) - x\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(y-z) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(y+z) - \frac{1}{2}(y+z) + x \\ \frac{1}{2}(y+z) + \frac{2}{4}(y-z) \\ \frac{1}{2}(y+z) - \frac{2}{4}(y-z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(d) nicht linear unabhängig,
z.B.

$$1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Erzeugendensystem,
da bereits $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right)$
Erzeugendensystem ist (Teil (b)).

(e) nicht linear unabhängig,
z.B. $$2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Kein Erzeugendensystem:
Für jeden Vektor $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \langle(\underline{v})\ldots\rangle$

ist $a=0$, daher z.B. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \notin \langle(\underline{v})\ldots\rangle$.